

Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné

Limita a spojitost funkce

RNDr. Jan Ostravský, CSc.

Ústav matematiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

6. června 2011

4.1 Limita funkce

Studijní cíle

1. Umět názorně vysvětlit na příkladech, co znamená pojem limita funkce.
2. Pochopit pojem okolí bodu a jeho souvislost s pojmem limita.
3. Zvládnout teoreticky pojem limita funkce, tj. definici limity funkce a její zápis.
4. Uvědomit si, co znamená spojení vlastní limita ve vlastním bodě.

4.1 Limita funkce

Definovat pojem limita funkce tak, aby mu rozuměli studenti nematematických oborů je úkol poměrně náročný. My se o to společně pokusíme. Vyjděme z pojmu limita. Je odvozen z latinského slova „limes“, což znamená v latině příčnou cestu, mez, v přesnějším významu hranici, pomezí atd. V matematice představuje limita hodnotu, ke které se „neomezeně blíží hodnota funkce, jestliže se hodnota proměnné neomezeně blíží k zadanému číslu“. Všimli jste si, že poslední formulace je v uvozovkách. Je to proto, že je i přes dobrou názornost velice nepřesná a v matematice taková formulace není povolena.

4.1 Limita funkce

Formulace „neomezeně se blíží“ není matematicky korektní, její smysl závisí na kontextu. Např. pro automechanika seřizujícího písty motoru neomezeně blízko znamená tisíce milimetrů, pro astronoma měřícího vzdálenosti hvězd to znamená několik tisíců hvězdných roků. Proč vlastně zavádíme pojem limity? Vždyť přece stačí do funkčního předpisu dosadit hodnotu proměnné a získat funkční hodnotu. Tak jednoduché to ovšem není. Funkce totiž nemusí být v daném bodě definovaná, ale může být definována pro hodnoty velmi blízké tomuto bodu. Nebo definována je, ale pro hodnoty proměnné, které jsou k x velmi blízké, jsou funkční hodnoty od $f(x)$ velmi vzdálené. Pokusíme se potřebnost pojmu limita vysvětlit na následujících dvou příkladech.

4.1 Limita funkce

Příklad 4.1.1. (geometrický) Máme zadanou funkci $y = f(x)$ na $D(f)$ a chceme v bodě $x_0 \in D(f)$ sestrojit tečnu ke grafu funkce.

Prezentace 4.1.1

Víme, že k určení dané přímky potřebujeme zadat dva její body. Určitě známe jeden bod hledané tečny. Je jím bod dotyku $[x_0, f(x_0)]$. Jak, ale nalezneme druhý bod tečny? Je zřejmé, že nebude ležet v obecném případě na grafu funkce. Zvolíme-li však na grafu funkce bod $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ „dostatečně blízký“ bodu dotyku, získáme sečnu, která nebude od hledané tečny příliš odkloněna. Podle volby h můžeme takových sečen udělat velmi mnoho (viz prezentace).

4.1 Limita funkce

Všechny prochází bodem dotyku a jejich směrnice byste měli umět odvodit ze znalostí ze střední školy sami

$$k(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Názorně je jasné, že určitou limitní polohou systému sečen v [Prezentaci 4.1.1/2-4](#) pro případ, že $x = x_0 + h$ se blíží (jde) k x_0 (zapíšeme $x \rightarrow x_0$), tj. h seblíží k nule ($h \rightarrow 0$), je právě hledaná tečna. Jenže nulu za h nemůžeme dosadit. Funkce $k(x)$ (viz [Prezentace 4.1.1/5](#)) není pro $x = x_0$, resp. $h = 0$ definována. Pro $x = x_0$ je v čitateli i jmenovateli zlomku nula. Pokud budeme hodnotu x krok za krokem přibližovat k x_0 , budou se pro případ tak hladkého grafu, jaký máme v prezentaci 4.1.1, čísel i jmenovatel zlomku co do absolutní hodnoty zmenšovat.

4.1 Limita funkce

Tušíme, že jejich podíly budou „rozumná čísla“, jejichž hodnoty se budou ustalovat. Zkusme tento předpoklad otestovat třeba pro funkci $y = x^3$ a pro bod $x_0 = 3$,

$$k(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}.$$

Výsledky ukazují tabulky 4.1.1, 4.1.2.

x	3,20	3,10	3,05	3,02	3,01	3,005	3,002	3,001
$k(x)$	28,84	27,91	27,4525	27,1804	27,09	27,045	27,018	27,009

Tabulka 4.1.1

x	2,80	2,90	2,95	2,98	2,99	2,995	2,998	2,999
$k(x)$	25,24	26,11	26,5525	26,8204	26,9101	26,955	26,982	26,991

Tabulka 4.1.2

4.1 Limita funkce

Podíl se zřejmě blíží k hodnotě 27. Zkusme kromě číselných výpočtů provést ještě rychlý algebraický odhad. Při výpočtu použijeme vzorce

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

a nakonec dosadíme $x = 3 + h$:

$$k(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = (3+h)^2 + 3(3+h) + 9 = 27 + 9h + h^2.$$

V průběhu výpočtu jsme vykrátili zlomek výrazem $(x - 3)$ (můžeme to udělat?). To můžeme udělat za předpokladu, že $x \neq 3$, ale x může být hodnotě 3 libovolně blízké. To odpovídá situaci, kdy je ve výsledku h libovolně blízké nule. Vidíme však, že je-li h blízké nule, je hodnota $9h + h^2$ také blízká nule.

4.1 Limita funkce

Vhodnou volbou h ji můžeme učinit tak malou, jak jen chceme. Veličina $k(x)$ se tedy blíží své limitní hodnotě 27 a právě to jsme odhadli z tabulky.

Příklad 4.1.2. (fyzikální) Automobil vyrazí od benzinové pumpy po přímé dálnici tak, že od okamžiku nájezdu na dálnici je jeho dráha v metrech závislosti na čase v sekundách určována funkcí $s(t) = 3t^2 + 10t$. Jaký údaj určuje ručička tachometru v okamžiku 5 sekund od nájezdu?

Pokud bychom změřili dráhu $s(t)$ v okamžiku $t > 5$ s a dráhu uraženou v okamžiku $t_0 = 5$ s, dostaneme **průměrnou** velikost rychlosti v intervalu $\langle 5, t \rangle$ i jako podíl dráhy uražené v tomto časovém intervalu $\Delta s = s(t) - s(5)$ a doby jeho trvání $\Delta t = t - 5$,

4.1 Limita funkce

$$\bar{v} = \frac{s(t)-s(5)}{t-5} = \frac{3t^2+10t-125}{t-5}.$$

Ručička tachometru neukazuje průměrnou velikost rychlosti. Její údaj se mění v každém okamžiku t_0 a odpovídá situaci, kdy t je velmi blízké t_0 . Ručička tachometru ukazuje okamžitou velikost rychlosti. V našem případě je $t_0 = 5\text{s}$. Když už teď umíme dělat odhady, nebudeme přece počítat tabulku. Označme $t = 5 + h$. Pak

$$\bar{v} = \frac{s(5+h)-s(5)}{h} = \frac{3(5+h)^2+10(5+h)-125}{h} = \frac{40h+3h^2}{h} = 40 + 3h.$$

Volbou malého h můžeme opět učinit odchylku výsledku od hodnoty $40\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ libovolně malou. Okamžitá velikost rychlosti auta v čase $t_0 = 5\text{s}$ je tedy $40\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, tj. $144\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

4.1 Limita funkce

Vidíme tedy, že limitní výrazy mohou mít praktický smysl. Pomalu směřujeme k matematické definici limity. Než vyslovíme přesnou definici limity, všimneme si ještě jednoho jednoduchého příkladu.

Příklad 4.1.3. (intuitivní pojetí limity) Uvažujme funkci

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}.$$

Její definičním oborem je množina $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Pokud bude $x \in D(f)$, můžeme psát

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} = x - 2.$$

4.1 Limita funkce

Grafem funkce je tedy přímka s vynechaným bodem $[3, 1]$ ([Prezentace 4.1.2/1](#)). V bodě $x_0 = 3$ není funkční hodnota definována. Kdybychom chtěli rozšířit definiční obor na celou reálnou osu x , musíme dodefinovat hodnotu funkce v bodě $x_0 = 3$. Původní vzorec, jímž je funkce zadána, výpočet hodnoty $f(3)$ neumožňuje. Dodatečné dodefinování funkce v bodě $x_0 = 3$ můžeme provést zcela libovolně. Zvolme například $f(3) = 2$. Graf dodefinované funkce je v [Prezentaci 4.1.2/2](#). Jiná možnost, jak dodefinovat funkce je $f(3) = 1$ ([Prezentace 4.1.2/3](#)). Které číslo je asi limitou funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 3$? Je to číslo 2 nebo číslo 1? A nebo úplně jiná hodnota? Intuice nám napovídá, že je to číslo 1.

4.1 Limita funkce

Když je použijeme pro dodefinování funkce, přetržený graf se „zacelí“. Vidíme, že vezmeme-li dostatečně malý interval proměnné x v blízkosti bodu $x_0 = 3$, docílíme toho, že všechny odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ budou ležet tak blízko hodnotě 1, jak si předem určíme. Skutečně, zkusme docílit toho, aby hodnoty $f(x)$ ležely v intervalu $(1 - 0,01; 1 + 0,01) = (0,99; 1,01)$, tj.

$$0,99 < x - 2 < 1,01 \Rightarrow 2,99 < x < 3,01, x \neq 3.$$

Zřejmě se to podařilo. Místo hodnoty 0,01 zvolme libovolně malé kladné číslo ε . Získáme obecně interval $I(\varepsilon) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ kolem funkční hodnoty 1.

4.1 Limita funkce

Kdybychom za číslo ε dosadili např. 0,001, podařilo by se opět najít (o něco menší - zkuste to) interval kolem bodu $x_0 = 3$ tak, aby pro všechny hodnoty x v něm (samozřejmě s případnou výjimkou hodnoty $x_0 = 3$) platilo $f(x) \in I(\varepsilon)$. Jistě si uvědomujete, že hodnotu ε bychom mohli dále stále zmenšovat.

Pro zajímavost si řekněme, jak by takový postup vypadal s hodnotou 2, která jak intuitivně cítíme, limitou funkce v bodě $x_0 = 3$ není, protože je graf funkce od bodu $[3, 2]$ dost vzdálen. Vezměme třeba interval $(1,5; 2,5)$ a hledejme hodnoty x obdobně jako v předchozím příkladě. Požadujeme

$$1,5 < x - 2 < 2,5 \Rightarrow 3,5 < x < 4,5.$$

Tento interval vůbec neobsahuje bod $x_0 = 3$! Dostali jsme se mimo blízkost bodu $x_0 = 3$.

4.1 Limita funkce

Z tohoto intuitivního příkladu je vidět, že důležitou roli při definování limity bude hrát interval okolo bodu x_0 . Matematici pro tento interval vymysleli přirozený název okolí bodu x_0 . Pokusme se o jeho přesnou definici. Všimněte si v definici jistých zpřesnění okolí bodu x_0 .

4.1 Limita funkce

Definice 4.1.1

Nechť δ_1, δ_2 jsou libovolná kladná čísla.

Interval $(x_0 - \delta_1, x_0)$ nazýváme **levým okolím bodu** x_0 .

(Obr. 4.1.1/1).

Interval $(x_0, x_0 + \delta_2)$ nazýváme **pravým okolím bodu** x_0

(Obr. 4.1.1/2).

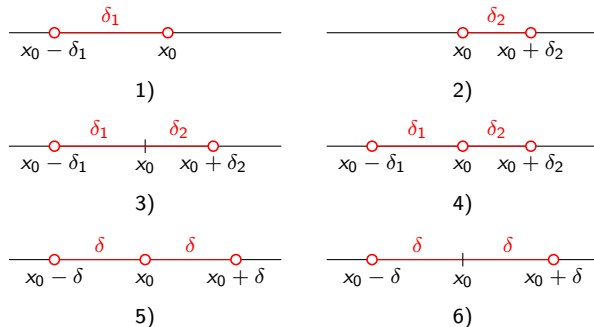
Interval $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ nazýváme **okolím bodu** x_0 (Obr. 4.1.1/3).

Množinu $(x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2)$ nazýváme **neúplným okolím bodu** x_0 (Obr. 4.1.1/4).

Okolí bodu x_0 budeme označovat $O(x_0)$, neúplné okolí bodu x_0 budeme označovat $O'(x_0)$.

4.1 Limita funkce

Jsou-li čísla δ_1, δ_2 v definici 4.1.1 shodná, hovoříme o **symetrickém neúplném okolí** (Obr. 4.1.1/5) či **symetrickém okolí** bodu x_0 (Obr. 4.1.1/6).



Obr. 4.1.1

4.1 Limita funkce

Je zřejmé, že má-li funkce určitou vlastnost pro všechny body daného okolí bodu x_0 , má ji také na každém „menším“ (dokonce symetrickém) okolí bodu x_0 . Načrtněte si takovou situaci. Body symetrického okolí bodu x_0 lze také vyjádřit pomocí nerovnosti $|x - x_0| < \delta$. Víte proč?

Po zavedení pojmu okolí bodu x_0 a předcházejících úvahách jsme schopni zavést pojem limity funkce v bodě x_0 .

4.1 Limita funkce

Definice 4.1.2

Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0 . Pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu L , když ke každému okolí $O(L)$ čísla L existuje takové neúplné okolí $O'(x_0)$ čísla (bodu) x_0 , že pro každé $x \in O'(x_0)$ platí $f(x) \in O(L)$. (matematicky bychom to zapsali takto $x \in O'(x_0) \Rightarrow f(x) \in O(L)$). Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

(Geometrický význam definice limity funkce v bodě osvětluje [Prezentace 4.1.3](#))

4.1 Limita funkce

Zaměníme-li v této definici neúplné okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 za levé okolí bodu x_0 , resp. pravé okolí bodu x_0 , dostaneme definici **limity zleva**, resp. **zprava**. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2.$$

Je zřejmé, že číslo L je limitou funkce f v bodě x_0 právě tehdy, existují v tomto bodě jak limita zprava, tak limita zleva a jsou si rovny. (Dovedli byste toto tvrzení (matematickou větu) zapsat symbolickým zápisem? Zkuste to!).

V případě, že v definici 4.1.2 jsou čísla x_0 a L reálná čísla, tj. $x_0, L \in \mathbb{R}$, mluvíme o vlastní limitě ve vlastním bodě.

4.1 Limita funkce

Zavedeme-li kladná čísla ε , δ , můžeme okolí $O(L)$ bodu L popsat intervalem $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ a neúplné okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 je možné popsat množinou $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Pak můžeme vyslovit tzv. „epsilondeltovou“ definici limity, která se často využívá v důkazech matematických vět o limitách.

Definice 4.1.3

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu L , když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x , $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.
(Geometrický význam definice limity funkce v bodě osvětluje [Prezentace 4.1.4](#))

4.1 Limita funkce

Příklad 4.1.4. Pro funkci $f : y = c$, $c \in \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}$, platí $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

(Důkaz uvedeme v [Prezentaci 4.1.5](#)).

Příklad 4.1.5. Pro funkci $f : y = x$, $D(f) = \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$.

Uměli byste toto tvrzení pomocí definice 4.1.2 nebo definice 4.1.3 dokázat? Je to velmi jednoduché.

4.2 Věty o limitách

Studijní cíle

1. Perfektně ovládat pravidla pro výpočet limit.
2. Pochopit výpočet limit pomocí metody nazvané metodou vykrácení nepohodlného výrazu.
3. Na příkladu vysvětlit větu o limitě složené funkce.

Pokud se budeme hlouběji zabývat limitou funkce vyvstanou jistě tyto otázky: Má funkce v každém bodě limitu? Může mít funkce více než jednu limitu v daném bodě?

4.2 Věty o limitách

Dá se ukázat, že např. Dirichletova funkce $\delta(x)$, která je definována takto:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \text{ iracionální číslo,} \\ 1, & \text{je-li } x \text{ racionální číslo.} \end{cases} \quad (\text{nelze ji graficky znázornit})$$

nemá v žádném bodě limitu.

Na druhou otázku odpovídá následující věta.

Věta 4.2.1.

Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

4.2 Věty o limitách

Jistě bychom chtěli limity nějakým způsobem prakticky počítat. K tomu poslouží níže uvedené pravidla pro počítání s limitami.

Věta 4.2.2.

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$. Pak platí

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2$,
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 - L_2$,
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$,
- d) $\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot L_1$,
- e) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, pokud $L_2 \neq 0$.

4.2 Věty o limitách

Analogická pravidla dostaneme pro jednostranné limity, tzn. zaměníme v předchozí tabulce slovo „limita“ za slovo „limita zprava“, resp. „limita zleva“. Tato pravidla vypadají docela přirozeně a asi bychom jiná ani nečekali. Přesto je matematici musí dokazovat. To necháme na nich, my je budeme pouze aplikovat v praktických příkladech.

Věta 4.2.3.

Nechť na nějakém neúplném okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$. Pak existuje limita funkce $h(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$.

4.2 Věty o limitách

Tato věta se používá v důkazech. Dovedli byste znázornit situaci popisovanou ve větě na obrázku? Zkuste to.

Věta 4.2.4 (Věta o limitě složené funkce).

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = L$ a existuje takové neúplné okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 , že pro všechny $x \in O'$ je $g(x) \neq a$. Pak složená funkce $f(g(x))$ má v bodě x_0 limitu a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$.

4.2 Věty o limitách

Příklad 4.2.1. Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(3x)$ a výsledek překontrolujte v Mathematice.

Řešení:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (3x) = \frac{3\pi}{2} \quad \wedge \quad \lim_{u \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin(u) = -1 \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(3x) = -1$$

V softwaru Mathematica použijeme následujícího příkazu
`Limit[Sin[3x], x->Pi/2]`

4.2 Věty o limitách

Tvrzení d) z věty 4.2.2 (viz str. 25), můžeme z pomoci znalosti příkladu 4.1.4 (viz str. 22) rozšířit na konečný počet sčítanců.

$$\text{Pro } k \in \mathbb{N} \text{ platí: } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^k c_i \cdot f_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x).$$

Z této poznámky a příkladu 4.1.5 (viz str. 22) okamžitě vyplývá výsledek následujícího příkladu.

Příklad 4.2.2. Pro polynomickou funkci

$$f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pro $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné.

4.2 Věty o limitách

Následující věta nám naznačuje, jak budeme limity prakticky počítat.

Věta 4.2.5.

Jestliže pro dvě funkce f , g platí pro všechna x z neúplného okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 , že $f(x) = g(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

4.2 Věty o limitách

Věta 4.2.5 se využívá při výpočtu limity podílu funkcí v bodě x_0 . Při výpočtu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h_1(x)}{h_2(x)}$ můžeme podíl $\frac{h_1(x)}{h_2(x)}$ krátit nebo rozšiřovat libovolným výrazem, který je v nějakém okolí bodu x_0 různý od nuly, aniž se změní limita podílu funkcí. Vyzkoušíme si tuto větu a věty z této kapitoly při praktických výpočtech limit v následujících příkladech. Tuto metodu můžeme nazvat „metodou vykrácení nepohodlného výrazu“.

Příklad 4.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4$$

4.2 Věty o limitách

Využili jsme větu 4.2.5. Funkce $f : y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ není v bodě $x_0 = 3$ definována. Čitatel i jmenovatel lze krátit výrazem $x - 3$. Funkce $g : y = x + 1$ je v bodě $x_0 = 3$ definována a má limitu rovnu číslu 4. Načrtněte grafy obou funkcí f a g .

Příklad 4.2.4. Funkce $f : y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ není definovaná v bodě $x_0 = 0$. Abychom se při výpočtu limity v bodě 0 zbavili „nepohodlného výrazu“ x ze jmenovatele, celý zlomek vhodně rozšíříme.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4.2 Věty o limitách

Příklad 4.2.5. Při výpočtu následující limity využijeme známého vzorce pro goniometrické funkce. Potřebujeme odstranit výraz $\sin x$ ze jmenovatele, protože $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2$$

Úkol 4.2.1. Vypočtěte limity z příkladů 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5 pomocí softwaru Mathematica.

4.3 Nevlastní limita

Studijní cíle

1. Pochopit slovní spojení „nevlastní limita funkce ve vlastním bodě“.
2. Prakticky ovládat výpočet nevlastní limity pomocí věty 4.3.2.

V definici limity jsme předpokládali, že L je reálné číslo. Mluvili jsme o vlastní limitě. Jistě si dovedete představit funkci, jejíž funkční hodnoty rostou do $+\infty$ nebo klesají do $-\infty$, když se x blíží k x_0 .

4.3 Nevlastní limita

Pak řekneme, že **funkce má v bodě x_0 nevlastní limitu $+\infty$** , případně $-\infty$. Grafické znázornění této situace je v [Prezentaci 4.3.1](#) a [Prezentaci 4.3.2](#). Uměli byste tento případ nějak popsat, tzn. sestavit příslušnou definici? Trochu Vám poradíme.

Definice 4.3.1.

Nechť funkce je definována na nějakém neúplném okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 . říkáme, že **funkce má v bodě x_0 nevlastní limitu $+\infty$** (případně $-\infty$) a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (případně $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$), když ke každému A existuje takové neúplné okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 , že pro každé $x \in O'(x_0)$ platí $f(x) > A$ (případně $f(x) < A$).

4.3 Nevlastní limita

Tuto definici si objasníme v [Prezentaci 4.3.3](#) a [Prezentaci 4.3.4](#). Všimněte si, že číslo A můžete volit libovolně velké (případně malé), v tom je smysl naší definice. Nevlastní limity mohou být i jednostranné tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Uměli byste pomocí definice 4.1.1 a definice 4.3.1 sestavit definice těchto limit? Znázorníme si tyto situace v [Prezentacích 4.3.5](#), [4.3.6](#), [4.3.7](#) a [4.3.8](#) a zároveň v nich příslušné definice sestavíme. Zřejmě platí následující věta:

4.3 Nevlastní limita

Věta 4.3.1.

Funkce má v bodě x_0 nevlastní limitu $+\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty.$$

Zřejmě nevlastní limitu získáme z limity podílu funkcí tj.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ je vlastní a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

což jsme ve větě 4.2.2 e) vyloučili. Následující věta dává návod,

jakým způsobem zjistíme, zda $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

4.3 Nevlastní limita

Věta 4.3.2.

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ je vlastní a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Existuje-li neúplné okolí $O'(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in O'(x_0)$ jsou obě funkce definovány a platí $f(x) \cdot g(x) > 0$ (případně $f(x) \cdot g(x) < 0$), pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \left(\text{případně } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \right).$$

Jistě už víte, že analogickou větu k této větě bychom mohli vyslovit i pro jednostranné limity. Zkuste to.

4.3 Nevlastní limita

V dalším příkladu ukážeme praktické použití věty 4.3.2

Příklad 4.3.1. Určete limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$.

Řešení: Nejdříve spočítáme limity $\lim_{x \rightarrow 1} x$ a $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)$. Učiníme tak přímým dosazením čísla 1 do výrazů x a $1-x$. Zřejmě platí, že $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0$. Nelze tedy použít větu 4.2.2 e).

Začneme vyšetřováním jednostranných limit $\lim_{x \rightarrow 1^+} x$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x)$.

Platí $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0$. Lze tedy použít analogii věty

4.3.2 pro výpočet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$.

4.3 Nevlastní limita

K tomuto účelu zvolíme pravé okolí bodu 1, např. interval $(1, 2)$. Protože hodnota součinu $x \cdot (1 - x)$ v tomto okolí záporná, je

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 - x} = -\infty$$

Dále platí $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0$. Protože hodnota součinu $x \cdot (1 - x)$ je v levém okolí např. $(0, 1)$ bodu 1 kladná, platí $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x} = \infty$. Podle věty 4.3.1 tedy limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x}$ neexistuje.

Po úpravě (převedení neryze lomené na funkce na celistvou a ryze lomenou dělením polynomů) zápisu funkce $y = \frac{x}{1-x}$ na tvar $y = -1 + \frac{1}{1-x} = -1 - \frac{1}{x-1}$ načrtneme takto upravenou funkci (srovnej v kapitole 3) a zkontrolujeme tak provedené úvahy a výsledky ([Prezentace 4.3.9](#)).

4.3 Nevlastní limita

V softwaru Mathematica použijeme pro výpočet jednostranné limity zprava následujícího příkazu

```
Limit[x/(1-x),x->1,Direction->-1]
```

4.4 Limita v nevlastním bodě

Studijní cíle

1. Pochopit slovní spojení „vlastní limita funkce v nevlastním bodě“. Umět zkonstruovat na tuto limitu nějaký příklad.
2. Prakticky ovládat výpočet limity v nevlastním bodě s využitím limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.
3. Osvojit si slovní spojení „nevlastní limita funkce v nevlastním bodě“. Umět zkonstruovat na tuto limitu nějaký příklad.
4. Pomocí vět 4.4.1, 4.4.2 zvládnout prakticky „bez výpočtu“ stanovení limity racionální funkce ryze či neryze lomené.

4.4 Limita v nevlastním bodě

5. Na praktických příkladech si uvědomit význam vlastní limity v nevlastním bodě.

V definici 4.1.3 jsme definovali „vlastní limitu L ve vlastním bodě x_0 “ tj. $x_0, L \in \mathbb{R}$. Pojem limity je možné rozšířit i na případy $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$. Podle předešlé terminologie se tak dostáváme k pojmu **limity funkce v nevlastních bodech** $+\infty$, $-\infty$. Definici těchto pojmů si přiblížíme na [Prezentacích 4.4.1](#) a [4.4.2](#). Z těchto obrázků se můžeme pokusit o definici „vlastní limity v nevlastním bodě“.

4.4 Limita v nevlastním bodě

Definice 4.4.1.

Říkáme, že funkce f má **vlastní limitu** L **v nevlastním bodě** $+\infty$ (případně $-\infty$) a píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje A tak, že pro všechna $x > A$ (případně $x < A$) platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tuto definici si objasníme v [Prezentacích 4.4.3](#) a [4.4.4](#).

Všimněte si, že číslo ε můžete volit libovolně malé a vždy k němu nalezneme vhodné A , v tom je smysl naší definice.

4.4 Limita v nevlastním bodě

Jistě vás napadne myšlenka, zda bychom nemohli také definovat nevlastní limitu v nevlastním bodě. Další definici sestavíme tedy pro případ, že funkce f bude mít nevlastní limitu $+\infty$ v nevlastním bodě $+\infty$. Uměli byste sestavit nějakou konkrétní funkci, která by měla takou limitu? Určitě např. funkce $y = \ln x$, $y = x$, $y = 2^x$ atd. Jak bychom tyto konkrétní limity zapsali? Jednoduše takto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty.$$

Pokuste se napsat některé další elementární funkce. Z obrázků těchto funkcí bychom mohli příslušnou definici sestavit. Mohla by vypadat třeba takto:

4.4 Limita v nevlastním bodě

Definice 4.4.2.

Říkáme, že funkce f má **nevlastní limitu** $+\infty$ **v nevlastním bodě** $+\infty$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, když ke každému reálnému A existuje reálné B tak, že pro všechna $x > B$ platí $f(x) > A$.

Tuto definici si objasníme v [Prezentaci 4.4.5](#). Všimněte si, že číslo A můžete volit libovolně malé a vždy k němu nalezneme vhodné B , v tom je smysl naší definice.

Příklad 4.4.1. Ze znalosti grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ určete limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}.$$

Řešení: [Prezentace 4.4.6](#)

4.4 Limita v nevlastním bodě

Vzhledem k tomu, že limity $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$,
s využitím tvrzení 4.2.2 c) snadno nahlédnete, že také limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tohoto výsledku budeme využívat při Řešení limity racionální lomené funkce, tedy limity podílu dvou polynomů.

Příklad 4.4.2. Určete limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 10x + 12}{6x^2 - 6x + 2}$.

4.4 Limita v nevlastním bodě

Řešení: Sledujme nejdříve chování racionální lomené funkce pro narůstající x . Čítec i jmenovatel jsou polynomy, je tedy zřejmé, že čítec i jmenovatel nabývají neomezeně velkých hodnot pro neomezený růst proměnné x . Otázka zní, zda se může podíl těchto neomezeně velkých hodnot „ustálit“ na nějaké konečné hodnotě. Jistě dovedeme odhadnout, že největší přírůstek k nárůstu funkční hodnoty polynomu pochází od nejvyšší proměnné, zatímco mocniny nižší již takovou roli hrát nebudou. V našem případě je nejvyšší mocninou v čitateli i jmenovateli druhá mocnina. Dá se tedy očekávat, že by limitou mohlo být nějaké konečné číslo. Zkusme nejdříve dosazovat čísla: 100, 1 000, 10 000, 100 000 atd. Už jste zjistili, které to bude?

4.4 Limita v nevlastním bodě

Ukážeme si metodu, jak tuto limitu spočítáme. Obvyklý rutinní výpočet spočívá ve vytknutí nejvyšší mocniny v čitateli i jmenovateli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 10x + 12}{6x^2 - 6x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(4 + \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2})}{x^2(6 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2})}.$$

S využitím věty 4.2.2 a výsledků z příkladu 4.4.1 limitu dopočítáme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(4 + \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2})}{x^2(6 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2})} = \left(\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4.4 Limita v nevlastním bodě

Graf funkce $y = \frac{4x^2+10x+12}{6x^2-6x+2}$ naleznete v [Prezentaci 4.4.7](#).

V softwaru Mathematica použijeme pro výpočet limity v nevlastním bodě následujícího příkazu

```
Limit[(4x^2+10x+12)/(6x^2-6x+2),x->Infinity]
```

4.4 Limita v nevlastním bodě

Výsledek tohoto příkladu bychom mohli zobecnit do následující věty:

Věta 4.4.1 (Vlastní limita racionální funkce v nevlastní bodě).

Jestliže $n \leq m$, tak pro hodnotu limity racionální funkce $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ v nevlastních bodech platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{jestliže } n = m, \end{cases}$$

kde a_n, b_m jsou koeficienty polynomů $P_n(x), Q_m(x)$ při jejich nejvyšší mocnině x .

4.4 Limita v nevlastním bodě

Věta 4.4.2 (Nevlastní limita racionální funkce v nevlastní bodě).

Jestliže $n > m$, tak pro hodnotu limity racionální funkce $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ v nevlastních bodech platí

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{jestliže } a_n b_m > 0, \\ -\infty, & \text{jestliže } a_n b_m < 0. \end{cases}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} -\infty, & \text{jestliže parita } n, m \text{ je shodná a } a_n b_m < 0, \\ & \text{jestliže parita } n, m \text{ je různá a } a_n b_m > 0, \\ \infty, & \text{jestliže parita } n, m \text{ je shodná a } a_n b_m > 0, \\ & \text{jestliže parita } n, m \text{ je různá a } a_n b_m < 0. \end{cases}$$

4.4 Limita v nevlastním bodě

Věta 4.4.2 (Nevlastní limita racionální funkce v nevlastní bodě).
pokračování...

Čísla a_n, b_m jsou koeficienty polynomů $P_n(x), Q_m(x)$ při jejich nejvyšší mocnině x .

Poznámka 4.4.1. Paritou čísel m, n myslíme jejich vlastnost být sudým anebo lichým číslem.

Pokusíme se najít nějaké aplikační příklady na limity v nevlastních bodech. Hodnota limity v nevlastním bodě aproximuje hodnotu funkce v extrémně velkých argumentech. Například růstové funkce jsou zajímavé z hlediska svých hodnot v „nekonečně“ velkých argumentech.

4.4 Limita v nevlastním bodě

Růstové funkce popisují vývoj sledované veličiny v závislosti na čase a hodnota limity v nevlastním bodě vyjadřuje jejich potenciální maximální hodnotu (růst prodeje zboží, růst stromu, růst mikrobiologické kultury atd.).

Mnohé jevy mají charakteristický průběh, který souvisí s jejich různou dynamikou růstu, resp. klesání. Často je popisujeme tzv. logistickými křivkami tvaru $f(x) = \frac{A}{1+ae^{bt}}$, $A > 0, a > 0, b < 0, t \geq 0$ (čas).

Příklad 4.4.3. (Růst mikrobiologické kultury) Růst mikrobiologické kultury je popsán následující funkční závislostí:

$$y = \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t}},$$

4.4 Limita v nevlastním bodě

kde t je čas, y množství kultury v gramech. Zjistěte, zda se skutečně jedná o rostoucí funkci a zda růst kultury je ohraničený, jestliže je ohraničený, jakou maximální hodnotu může dosáhnout.

Řešení: Vyšetříme monotónnost dané funkce, přičemž využijeme znalost grafu exponenciální funkce $y = e^{-0,4t}$. Z [Prezentace 4.4.8](#) vyplývá, že exponenciální funkce $y = e^{-0,4t}$ je klesající a $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,4t} = 0$. Dokažme nyní, že funkce $y = \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t}}$ je rostoucí.

4.4 Limita v nevlastním bodě

$$\begin{aligned}t_1 &< t_2, \\e^{-0,4t_1} &> e^{-0,4t_2}, \\6,5e^{-0,4t_1} &> 6,5e^{-0,4t_2}, \\1 + 6,5e^{-0,4t_1} &> 1 + 6,5e^{-0,4t_2}, \\ \frac{1}{1+6,5e^{-0,4t_1}} &< \frac{1}{1+6,5e^{-0,4t_2}}, \\ \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t_1}} &< \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t_2}}.\end{aligned}$$

Funkce $y = \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t}}$ je tedy rostoucí (def. 3.4.4.) a protože

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{750}{1+6,5e^{-0,4t}} = \frac{750}{1+6,5 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,4t}} = \frac{750}{1+6,5 \cdot 0} = 750,$$

je daná funkce shora ohraničená číslem 750 ([Prezentace 4.4.9](#)).

4.4 Limita v nevlastním bodě

Toto číslo vyjadřuje maximálně možné množství dané kultury, které lze dosáhnout za předpokladu, že se tato kultura bude rozmnožovat neomezený čas.

Příklad 4.4.4. (Korfova růstová funkce)

Výšku stromu v závislosti na čase modeluje Korfova funkce $y = Ae^{-\frac{k}{nt^n}}$, kde A, k, n jsou kladné konstanty, které závisí na druhu dřeviny a environmentálních podmínkách. Pomocí limitního počtu ukažte, že pro $t \rightarrow 0^+$ se hodnota funkce blíží k nule a výpočtem limity pro $t \rightarrow \infty$ zdůvodněte význam konstanty A .

4.4 Limita v nevlastním bodě

Řešení: Funkce $y = Ae^{-\frac{k}{nt^n}}$ je definována pro $t \in (0, \infty)$ a výšku stromu v čase $t = 0$ (která je zřejmě nulová) můžeme vypočítat jen jako limitní případ $\lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{k}{nt^n}}$. Protože $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} = \infty$,

tak $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k}{nt^n} = \infty$ a v konečném důsledku

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{k}{nt^n}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} A \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{k}{nt^n}} = A \cdot 0 = 0. \text{ Jestliže } t \rightarrow \infty, \text{ tak}$$

hodnota limity (v nevlastním bodě ∞) $\lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{-\frac{k}{nt^n}} =$

$Ae^{\lim_{t \rightarrow \infty} (-\frac{k}{nt^n})} = Ae^0 = A$ vyjadřuje maximální výšku stromu, kterou může daná dřevina dosáhnout při neomezeném růstu.

4.4 Limita v nevlastním bodě

Úkol 4.4.1. Stanovte funkce $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, v následujících limitách tak, aby platilo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(x) = 5, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f_2(x) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_3(x) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f_4(x) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f_5(x) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f_6(x) = -\infty.$$

O správné volbě funkcí f_i se přesvědčte výpočtem těchto limit pomocí softwaru Mathematica.

4.5 Asymptoty grafu funkce

Studijní cíle

1. Umět vysvětlit pojmy asymptota se směrnicí a asymptota bez směrnice s příslušnými náčrty těchto asymptot.
2. Naučit se vzorce pro výpočet koeficientů k, q v rovnici asymptoty se směrnicí $y = kx + q$ (věta 4.5.1).

Stává se, že při zkoumání grafu funkce se pro neomezeně rostoucí (klesající) argument x body grafu funkce přibližují k bodům určité přímky. Takovou přímku nazveme **asymptotou se směrnicí ke grafu funkce** $y = f(x)$ (není kolmá na osu x). Zkoumejme obrázek v [Prezentaci 4.5.1](#).

4.5 Asymptoty grafu funkce

Vidíme, že body grafu funkce se přibližují k přímce právě tehdy, když $f(x) - kx - q \rightarrow 0$. Na základě této úvahy jistě porozumíte definici asymptoty se směrnicí.

Definice 4.5.1.

Přímka o rovnici $y = kx + q$ je **asymptota se směrnicí ke grafu** funkce $y = f(x)$, když platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$$

Víme, že asymptota je přímka. Vezmeme směrnicový tvar rovnice přímky $y = kx + q$. Následující věta dává návod, jak koeficienty k, q v rovnici $y = kx + q$ vypočítáme.

4.5 Asymptoty grafu funkce

Věta 4.5.1.

Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnici ke grafu funkce $y = f(x)$ právě tehdy, když současně platí

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \quad \text{nebo} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = q$$

Jistě vás napadlo, že zřejmě existují i asymptoty kolmé na osu x , které nazýváme **asymptoty bez směrnice** ke grafu funkce.

Připomeňme si graf funkce $y = \frac{1}{x}$ v [Prezentaci 4.5.2](#).

4.5 Asymptoty grafu funkce

Z prezentace je vidět, že ke grafu funkce existují dvě asymptoty:

- a) asymptota se směrnicí $y = 0$ (jedná se o speciální případ, v němž je konstanta $k = 0$). Takové asymptoty nazýváme „vodorovné“ asymptoty,
- b) asymptota bez směrnice $x = 0$. Z prezentace 4.5.2 je vidět, že pro tento případ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ a $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Jistě vyvstane otázka, zda také případ b) nelze popsat obecně nějakou matematickou definicí. Není to nic těžkého:

4.5 Asymptoty grafu funkce

Definice 4.5.2.

Přímka $x = x_0$ je **asymptotou bez směrnice** ke grafu funkce $y = f(x)$, když existuje aspoň jedna z nevlastních limit:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.\end{aligned}$$

Úkol 4.5.1. Stanovte funkci $f(x)$, aby měla asymptotu bez směrnice $x = 2$. O správné volbě funkce $f(x)$ se přesvědčte výpočtem pomocí softwaru Mathematica (co budeme vlastně počítat?).

4.5 Asymptoty grafu funkce

Úkol 4.5.2. Stanovte funkci $f(x)$, aby měla tyto asymptotu bez směrnice $x = 3$, $x = -3$. O správné volbě funkce $f(x)$ se přesvědčte výpočtem pomocí softwaru Mathematica (co budeme vlastně počítat?).

Úkol 4.5.3. Stanovte funkci $f(x)$, aby měla „vodorovnou“ asymptotu $y = 2$. O správné volbě funkce $f(x)$ se přesvědčte výpočtem těchto limit pomocí softwaru Mathematica (co budeme vlastně počítat?).

Na závěr tohoto odstavce spočítáme vzorový příklad.

4.5 Asymptoty grafu funkce

Příklad 4.5.1. Určete asymptoty grafu funkce $y = x + \frac{1}{x}$

Řešení: Protože $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, existuje asymptota bez směrnice o rovnici $x = 0$. Stejně tak i z limity zleva

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ plyne existence asymptoty bez směrnice o rovnici $x = 0$. Najdeme asymptotu o rovnici $y = kx + q$. Spočteme

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 1, \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0.$$

Existuje asymptota $y = x$. Další asymptota neexistuje, protože také

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0.$$

4.5 Asymptoty grafu funkce

Výpočtem se jen potvrdilo „asymptotické chování“ grafu funkce i pro $x \rightarrow -\infty$. Graf funkce a její asymptoty naleznete v [Prezentaci 4.5.3](#).

Úkol 4.5.4. Překontrolujte výpočet asymptoty z příkladu 4.5.1 pomocí softwaru Mathematica.

4.6 Spojitost funkce

Studijní cíle

1. Umět názorně vysvětlit na příkladech, co znamenají pojmy spojitá a nespojitá funkce (pozorně si prohlédnout definici 4.6.1).
2. Pochopit definici spojité funkce.
3. Porozumět významným větám o spojité funkci na uzavřeném intervalu (Weierstrasova, Bolzanova, Rolleova).

Při sledování reálných jevů se vyskytují funkce, jejichž průběh grafu je „plynulý“, „nepřerušovaný“, „spojitý“, příklady se dají uvést z mechaniky, z teorie plynů atd. Existují, ale i funkce probíhající „po skocích“ (např. v teorii informace).

4.6 Spojitost funkce

Vrátíme-li se k [Prezentaci 4.1.2](#) vidíme, že graf funkce je v bodě $x = 3$ přerušný - nespojitý. Všimli jsme si také, že po dodefinování funkce hodnotou $f(3) = 1$ se graf funkce „zacelil“. Zdá, se že pokud limita funkce v nějakém bodě se bude rovnat funkční hodnotě, graf funkce v tomto bodě bude spojitý.

Definice 4.6.1.

Funkci $f(x)$ definovanou v jistém okolí bodu x_0 nazveme **spojitou v bodě** x_0 , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.6 Spojitost funkce

Analogicky můžeme definovat **spojitost zleva** a **spojitost zprava**.

Tabulka 4.6.1 popisuje jednotlivé stránky [Prezentace 4.6.1](#), kde jsou znázorněny různé situace objasňující pojem spojitosti, eventuálně nespojitosti funkce. Z obrázků v prezentaci vyplývá, že definice spojitosti odpovídá situaci, kdy graf funkce není v bodě x_0 „přetržen“, je spojitý. Plný kroužek označuje bod, který náleží grafu funkce.

4.6 Spojitost funkce

4.6.1 /	Funkční hodnota	limita zleva	limita zprava	limita	spojitá zleva	spojitá zprava	spojitá
1	nedef.	L_1	L_2	neex.	ne	ne	ne
2	$f(x_0)$	L_1	L_2	neex.	ne	ne	ne
3	$f(x_0)$	L_1	$f(x_0)$	neex.	ne	ano	ne
4	$f(x_0)$	$f(x_0)$	L_2	neex.	ano	ne	ne
5	nedef.	L	L	L	ne	ne	ne
6	$f(x_0)$	L	L	L	ne	ne	ne
7	$f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0)$	ano	ano	ano

Tabulka 4.6.1: Prezentace 4.6.1

4.6 Spojitost funkce

Pojem spojitosti funkce je velmi důležitý zejména v aplikacích. Jak je to se spojitostí elementárních funkcí? Výsledek se nachází v následující větě.

Věta 4.6.1.

Každá základní elementární funkce, jejímž definičním oborem je otevřený interval, je spojitá v každém bodě definičního oboru. Je-li definována v uzavřeném nebo polouzavřeném intervalu, je v krajním bodě definičního oboru jednostranně spojitá.

Velmi zajímavé i z praktického hlediska jsou věty o spojitých funkcích na uzavřených intervalech. Uvedeme ty nejvýznamnější.

4.6 Spojitost funkce

Věta 4.6.2 (Weierstrasova).

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší a nejmenší hodnoty.

Věta 4.6.3 (Bolzanova).

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$, ve kterém $f(c) = 0$ (graf funkce protíná osu x).

Grafické znázornění této věty se zajímavou aplikací naleznete v [Prezentaci 4.6.2](#).

4.6 Spojitost funkce

Věta 4.6.4 (Rolleova).

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že tečna ke grafu funkce vedená bodem $[c, f(c)]$ je rovnoběžná s osou x .

Grafické znázornění této věty naleznete v [Prezentaci 4.6.3](#).

Shrnutí

V této kapitole byste měli beze zbytku pochopit pojem limity funkce. Umět vysvětlit slovní spojení: vlastní limita ve vlastním bodě, nevlastní limita ve vlastním bodě, vlastní limita v nevlastním bodě, nevlastní limita v nevlastním bodě a na každý případ umět zkonstruovat konkrétní funkci, která má požadovanou limitu. Dále byste měli umět prakticky vypočítat tyto limity podle příslušných matematických vět. Důležitým objektem při vyšetřování průběhu funkce (v dalších kapitolách) bude asymptota. Proto byste měli zvládnout techniku výpočtu jak asymptoty bez směrnice, tak asymptoty se směrnicí. V neposlední řadě byste měli pochopit pojem spojitě funkce a přesně vědět, kde jsou základní elementární funkce spojitě (věta 4.6.1), neboť se spojitými funkcemi se pracuje mnohem lépe než s nespojitými.

Bylo dobré pochopit výsledky vět o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu (budou se ještě hodit) - věty 4.6.2, 4.6.3 a 4.6.4.

Klíčová slova

okolí bodu, limita funkce, vlastní limita, nevlastní limita, asymptota ke grafu funkce, spojitost funkce